Bulles rationnelles et fluctuations de l'activité

Stefano Bosi, Thomas Seegmuller

GREQAM
Groupement de Recherche en Economie
Quantitative d'Aix-Marseille - UMR-CNRS 6579
Ecole des Hautes études en Sciences Sociales
Universités d'Aix-Marseille II et III

Document de Travail
n°2011-03

Bulles rationnelles et fluctuations de l'activité

Stefano Bosi
Thomas Seegmuller

January 2011

Bulles rationnelles et fluctuations de l'activité

Stefano Bosi*et Thomas Seegmuller†

14 janvier 2011

Résumé

Cet article propose de présenter dans un cadre simple, mais unifié, un certain nombre de résultats liés à l'existence et aux fluctuations d'une bulle rationnelle. Nous développons une économie d'échange à générations imbriquées dans laquelle chaque ménage fait un choix de portefeuille entre monnaie, détenue à cause d'une contrainte de liquidité, et un autre actif sans valeur fondamentale. On montre l'existence d'équilibres où ce deuxième actif a une valeur positive, c'est-à-dire avec bulle rationnelle pure. Nous exhibons des fluctuations de l'activité et de la bulle, dues à la volatilité des anticipations des agents. Une politique monétaire expansive peut immuniser l'économie contre de telles fluctuations endogènes. La vertu stabilisatrice de la politique monétaire est toutefois modérée par une perte de bien-être qui vérifie la critique de Friedman (1969). Nous montrons également les possibilités d'éclatement de cette bulle rationnelle. Enfin, une bulle sur l'encaisse réelle peut apparaître, de manière temporaire. Nous montrons que ce phénomène est aussi source de fluctuations auto-entretenues de l'activité. Nous concluons en discutant d'un certain nombre de développements récents, liés aux imperfections du marché du crédit.

Classification JEL : D91, E32, E50.

Mots-clés : bulles, fluctuations, volatilité des anticipations, politique monétaire, constrainte d'encaisse préalable, générations imbriquées.

*THEMA, Université de Cergy-Pontoise, 33 boulevard du Port, 95011 Cergy-Pontoise CEDEX, France. Tel : + 33 1 34 25 22 54. Fax : + 33 1 34 25 62 33. E-mail : stefano.bosi@u-cergy.fr.

†CNRS et GREQAM, Centre de la Vieille Charité, 2 rue de la Charité, 13236 Marseille CEDEX 02, France. Tel : + 33 4 91 14 07 27. Fax : + 33 4 91 90 02 27. E-mail : thomas.seegmuller@univmed.fr.

1 Introduction

Les crises financières sont souvent intimement liées à l'éclatement de bulles spéculatives.[1] La crise récente qui a vu sont origine dans celle des subprimes en est un exemple criant, mais l'histoire nous apprend que les bulles et les crises financières qui souvent suivent leur éclatement, reviennent périodiquement. Parmi tant d'autres, des exemples célèbres sont la tulipomanie du dix-septième siècle en Hollande, le krach financier de 1720 à Londres qui suivit la spéculation entre 1711 et 1720 sur les titres émis par la Compagnie des mers du Sud (*South Sea Company*) et qui conduisit le Parlement anglais à adopter le *Bubble Act*, ou encore la bulle internet de la fin des années 1990.

L'idée que les bulles puissent traduire un comportement irrationnel est ancienne. La bulle de la Compagnie des mers du Sud causa la crise boursière de 1720 en Grand-Bretagne. Bourne (1871) écrit que Newton aurait affirmé à cette occasion : "*I can calculate the motions of erratic stars, but not the madness of the multitude*". Cette vision traditionnelle est toujours présente dans les débats autour de l'évolution des actifs financiers. On se souvient qu'en 1996, Alan Greespan parle d'exubérance irrationnelle pour qualifier le mouvement des bulles sur le marchés financiers.[2] Cependant, l'idée que les acheteurs puissent suivre un comportement irrationnel ne fait pas l'unanimité chez les économistes.

C'est ce qui ressort, plus généralement, de l'importante littérature portant sur le prix des actifs (Campbell (1999, 2000)). En effet, certains développements récents exploitent la rationalité, par exemple, à travers les cascades informationnelles qui expliquent les comportements moutonniers d'agent rationnels (Banerjee (1992), Bikhchandani, Hirshleifer et Welch (1993), Cont et Bouchaud (2000)). D'autres, en revanche, s'affranchissent du comportement rationnel des agents en étudiant si des formes de rationalité limitée permettent de mieux expliquer l'évolution du prix des actifs (Hommes (2006), Shiller (1999)).

L'approche que nous retenons dans ce papier se situe davantage dans la lignée des contributions de Tirole (1982, 1985). Celles-ci ont montré, en se

[1] On peut définir un bulle comme la différence entre le prix de marché d'un actif et sa valeur intrinsèque ou fondamentale, qu'on définit comme la valeur escomptée des dividendes futurs. Evidemment, les anticipations jouent un rôle crucial dans l'existence de bulles. En effet, un prix élevé aujourd'hui se justifie uniquement par la croyance qu'il sera plus élevé demain. Une définition formelle est donnée dans la Section 2.

[2] Robert Shiller donne d'ailleurs le titre *Irrational Exuberance* à son livre publié en 2000.

plaçant dans le cadre de modèles d'équilibre générale dynamique, sous quelles conditions une bulle spéculative rationnelle peut émerger et persister dans le long terme. En considérant un modèle à générations imbriquées, Tirole (1985) montre, en outre, qu'il existe un unique sentier de croissance qui converge vers un état stationnaire avec bulle. Ce cadre rationnel exclut donc toute fluctuation des actifs financiers.

Pourtant, les travaux empiriques de Shiller (1981, 1989, 2000), LeRoy et Porter (1981), Poterba et Summers (1988) prouvent que les prix des actifs fluctuent plus que les fondamentaux sous-jacents. En particulier, Shiller (1981) mesure la volatilité des actions et trouve qu'elle est cinq fois supérieure à celle des dividendes réels.

L'objectif de ce papier est donc d'exposer un certain nombre de résultats qui montrent la possibilité de fluctuations d'une bulle rationnelle. Comme nous allons considérer un modèle d'équilibre général dynamique, il va en résulter des fluctuations de toutes les variables macroéconomiques. On a donc une implication de la sphère financière sur la réelle. L'élément-clé de notre analyse va être les anticipations, et ceci à deux niveaux. En effet, une bulle rationnelle n'existe aujourd'hui que si les agents anticipent qu'elle va perdurer, avec une probabilité non nulle, à la période suivante.[3] Par ailleurs, les fluctuations auxquelles nous nous intéressons ici vont être dues aux anticipations auto-réalisatrices des agents.[4]

Nous présentons un modèle à générations imbriquées simple, qui va nous permettre de réexaminer tous les principaux résultats rencontrés dans la littérature sur bulles rationnelles et fluctuations. Nous considérons une économie d'échange, dans laquelle les agents font un choix de porte-feuille entre la détention d'un actif sans valeur fondamentale et de monnaie. Lorsque le premier actif est détenu et a donc une valeur positive, c'est une bulle pure. En revanche, la monnaie est détenue parce qu'il y a une contrainte d'encaisses préalables qui porte sur la consommation de deuxième période de vie.[5] La présence de monnaie va également nous permettre de discuter du rôle stabilisateur de la croissance monétaire, de son impact sur le bien-être et sur

[3]En effet, si une bulle rationnelle éclate, elle ne peut pas se reformer (Diba et Grossman (1987, 1988)).

[4]Benhabib et Farmer (1999) proposent une revue de la littérature sur l'existence de telles fluctuations dans les modèles d'équilibre général macro-dynamiques.

[5]Ce type de contrainte a été introduite par Hahn et Solow (1995). Pour une présentation synthétique des différentes formes de contraintes d'encaisses préalables dans les modèles à générations imbriquées, voir Crettez et al. (1999).

l'existence de la bulle spéculative.

L'analyse des solutions stationnaires nous conduit à montrer sous quelles conditions un équilibre avec bulle peut coexister avec celui sans bulle. Comme dans Tirole (1985), le taux d'intérêt de l'équilibre sans bulle doit être suffisamment faible.

L'étude de la dynamique locale, dans le voisinage de l'état stationnaire avec bulle, nous amène à montrer que la bulle peut persister et connaître des fluctuations persistantes à cause des anticipations auto-réalisatrices des agents. On observe qu'une politique monétaire expansive peut immuniser l'économie contre de telles fluctuations endogènes et avoir une fonction stabilisatrice. Toutefois, elle réduit le bien-être, la règle de Friedman (1969) étant optimale.

Nous réexaminons ensuite le résultat de Weil (1987) qui explique l'éclatement possible d'une bulle par la volatilité des anticipations des agents. Une section de notre article est ainsi consacrée à l'introduction d'un processus markovien similaire à celui considéré par cet auteur. Cela nous permet de montrer l'existence de bulles stochastiques et de l'éclatement de la bulle dans notre modèle. En outre, nous montrons qu'une politique monétaire expansive peut éradiquer l'existence de toute bulle pure.

Enfin, en nous inspirant de l'analyse proposée dans Michel and Wigniolle (2003, 2005), des fluctuations d'une bulle rationnelle peuvent résulter d'un changement de régime. En effet, une bulle peut également apparaître sur les encaisses réelles, de manière temporaire. L'économie peut alors osciller entre des périodes où une bulle se forme aussi sur la monnaie et des périodes où la contrainte d'encaisses préalables est saturée. De nouveau, la volatilité des anticipations joue un rôle-clé pour engendrer de telles fluctuations.

L'article est organisé de la manière suivante. La deuxième section présente la définition d'une bulle. Dans la Section 3, nous présentons le modèle. Les arbitrages optimaux sont déterminés dans la Section 4. La section suivante définit l'équilibre intertemporel. Dans la Section 6, nous étudions les états stationnaires. Les fluctuations dans le voisinage de l'état stationnaire avec bulle sont appréhendées dans la Section 7. La politique monétaire est considérée dans la Section 8. Les Sections 9 et 10 correspondent aux extensions du modèle portant sur les bulles stochastiques et la bulle temporaire sur les encaisses réelles. La Section 11 conclut et présente certains développements très récents liés aux imperfections du marché du crédit, tandis qu'un certain nombre de détails techniques sont relégués en annexe.

2 Définition formelle d'une bulle

Avant de développer notre cadre d'analyse, nous présentons dans cette section la définition d'une bulle (Froot et Obstfeld (1991)).

Soit i un facteur d'intérêt, supposé constant pour simplifier, p_t le prix d'un actif en t et δ_t le dividende auquel cet actif donne droit en t. L'équation d'arbitrage qui gouverne l'évolution du prix est donnée par :

$$p_t = \frac{E_t\left(\delta_{t+1} + p_{t+1}\right)}{i} \tag{1}$$

En itérant la substitution du prix futur, on trouve :

$$p_t = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{E_t\left(\delta_{t+s}\right)}{i^s} + \lim_{s \to \infty} \frac{E_t\left(p_{t+s}\right)}{i^s}$$

On définit la valeur fondamentale du titre comme la valeur escomptée des dividendes futurs :

$$v_t = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{E_t\left(\delta_{t+s}\right)}{i^s}$$

On remarque que $p_t = v_t$ est une solution de l'équation (1). Cependant, il est facile de montrer que $p_t = v_t + B_t$ est aussi une solution de l'équation (1) si B_t est une martingale, c'est-à-dire si :

$$B_t = \frac{E_t\left(B_{t+1}\right)}{i}$$

Une bulle en t est la différence entre le prix du titre et sa valeur fondamentale :

$$B_t = p_t - v_t$$

Dans la suite de cet article, nous allons développer un modèle d'équilibre général dynamique dans lequel une bulle pure pourra apparaître. Cela correspondra à un actif sans valeur fondamentale, c'est-à-dire tel que $v_t = 0$.

3 Le modèle

On considère une économie d'échange à générations imbriquées. Le temps est discret, $t = 0, 1, ..., \infty$, et les prévisions parfaites. Chaque génération vit deux périodes. Pour simplifier, il n'y a pas de croissance démographique et la taille de chaque génération est normalisée à l'unité.

Le ménage représentatif de la génération née à la période t, consomme c_t dans sa jeunesse et d_{t+1} dans le reste de sa vie. L'utilité du cycle de vie est additivement séparable :

$$u(c_t) + \beta v(d_{t+1}) \equiv \frac{c_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \beta \frac{d_{t+1}^{1-\varepsilon}}{1-\varepsilon} \tag{2}$$

Le facteur d'escompte $\beta \in (0,1)$ mesure la patience des consommateurs, alors que $\sigma \equiv |cu''(c)/u'(c)| > 0$ et $\varepsilon \equiv |dv''(d)/v'(d)| > 0$ sont les degrés de concavité des utilités.

Le consommateur est soumis à deux contraintes budgétaires :

$$p_t c_t + M_{t+1} + B_t \leq p_t e_1 + T_t \tag{3}$$
$$p_{t+1} d_{t+1} \leq M_{t+1} + i_{t+1} B_t + p_{t+1} e_2 \tag{4}$$

En première période, il achète le bien de consommation c_t au prix p_t et il épargne sous forme d'encaisses monétaires M_{t+1} et d'un actif sans valeur fondamentale dont le prix monétaire est B_t. Pour financer ces achats, il vend ses dotations réelles e_1 et utilise T_t, qui représente un transfert de la part de l'autorité monétaire :

$$T_t = M_{t+1} - M_t = (\mu - 1) M_t \tag{5}$$

où $\mu \equiv M_{t+1}/M_t \geqslant 1$ indique le facteur de croissance monétaire.

En deuxième période, il achète le bien de consommation au prix p_{t+1} en mobilisant son épargne éventuellement rémunérée $(M_{t+1} + i_{t+1} B_t)$ ainsi que ses nouvelles dotations (e_2).

On note aussi que les dotations e_1 et e_2 demeurent identiques pour toutes les générations. Par ailleurs, $i_{t+1} - 1$ représente le taux d'intérêt nominal sur l'actif sans valeur fondamentale. Son prix B_t va évoluer de la façon suivante :

$$B_{t+1} = i_{t+1} B_t \tag{6}$$

Il y aura donc une bulle pure lorsque ce prix sera strictement positif $(B_t > 0)$.

Finalement, en nous inspirant de Hahn et Solow (1995), on introduit une contrainte d'encaisses préalables (*cash-in-advance*) sur les achats futurs. Le ménage doit payer une partie $\gamma \in [0,1)$ de sa consommation de deuxième période avec la monnaie qu'il a thésaurisée préalablement :

$$\gamma p_{t+1} d_{t+1} \leqslant M_{t+1} \tag{7}$$

4 Comportements optimaux

On note $\pi_{t+1} \equiv p_{t+1}/p_t$ le facteur d'inflation et $m_t \equiv M_t/p_t$ les encaisses réelles. Par ailleurs, $b_t \equiv B_t/p_t$ et $\tau_t \equiv T_t/p_t$ représentent respectivement la bulle et les transferts monétaires en termes réels.

On peut ainsi reformuler le programme du ménage en termes réels. Les contraintes budgétaires (3) et (4) s'écrivent :

$$\begin{aligned} c_t + m_{t+1}\pi_{t+1} + b_t &\leq e_1 + \tau_t && (8) \\ d_{t+1} &\leq m_{t+1} + \frac{i_{t+1}}{\pi_{t+1}} b_t + e_2 && (9) \end{aligned}$$

et la contrainte d'encaisses préalables (7) devient :

$$\gamma d_{t+1} \leqslant m_{t+1} \tag{10}$$

Un consommateur né en t maximise l'utilité (2) sous les contraintes (8)-(10). Si le taux d'intérêt nominal est positif :

$$i_{t+1} > 1 \tag{11}$$

la monnaie est un actif dominé et la contrainte (10) est saturée. Les précisions sur cette maximisation sont données en Annexe.

Alors, l'arbitrage intertemporel du consommateur égalise le taux marginal de substitution intertemporel au facteur d'intérêt réel (i_{t+1}/π_{t+1}), modifié par l'imperfection du marché du crédit (γ) et le coût opportunité de détention de la monnaie $(i_{t+1} - 1)$:

$$\frac{u'(c_t)}{\beta v'(d_{t+1})} = \frac{i_{t+1}}{\pi_{t+1}} \frac{1}{1 + \gamma (i_{t+1} - 1)} \tag{12}$$

Dans la suite, on supposera que la monnaie est un actif dominé, c'est-à-dire que l'inégalité (11) est satisfaite. Dans le cas où cela ne sera pas le cas, on précisera qu'il y a un changement de régime.

5 Equilibre

Dans cette section, nous définissons un équilibre intertemporel lorsque $i_{t+1} > 1$, c'est-à-dire lorsque la contrainte d'encaisses préalables est saturée.

D'après l'équation (5), on déduit :

$$\begin{aligned} m_{t+1}\pi_{t+1} &= \mu m_t & (13) \\ \tau_t &= (\mu - 1)\, m_t & (14) \end{aligned}$$

On réécrit ainsi plus simplement la contrainte budgétaire (8) :

$$c_t + m_t + b_t = e_1 \tag{15}$$

Par ailleurs, en substituant l'évolution de la bulle (6) :

$$b_{t+1}\pi_{t+1} = i_{t+1} b_t \tag{16}$$

dans la contrainte budgétaire (9), on obtient :

$$d_{t+1} = m_{t+1} + b_{t+1} + e_2 \tag{17}$$

La contrainte d'encaisses préalables (10) étant saturée :

$$d_{t+1} = m_{t+1}/\gamma \tag{18}$$

nous déduisons :

$$b_{t+1} = \frac{1-\gamma}{\gamma} m_{t+1} - e_2 \geqslant 0 \tag{19}$$

Cette inégalité impose une borne inférieure à m_t :

$$m_t \geqslant \frac{\gamma}{1-\gamma} e_2 \equiv \underline{m} \tag{20}$$

La bulle disparaît ($b_t = 0$) quand les encaisses réelles atteignent leur borne inférieur ($m_t = \underline{m}$).

Cependant, il existe aussi une borne supérieure pour m_t. En effet, si l'on remplace l'équation de la bulle (19) dans la contrainte budgétaire (15), on obtient la consommation de première période :

$$c_t = e_1 + e_2 - m_t/\gamma \tag{21}$$

La positivité de la consommation impose une borne supérieure aux encaisses :

$$m_t < \gamma\,(e_1 + e_2) \equiv \overline{m} \tag{22}$$

Evidemment, la compatibilité des bornes ($\underline{m} < \overline{m}$) introduit une restriction typique des modèles monétaires à générations imbriquées : la contrainte d'encaisses préalables doit être partielle. Formellement :

$$\gamma < e_1 / (e_1 + e_2) \equiv \overline{\gamma}$$

Par ailleurs, d'après l'équation (13) le facteur d'inflation s'écrit :

$$\pi_{t+1} = \mu \frac{m_t}{m_{t+1}} \tag{23}$$

La substitution de (19) et (23) dans (16) donne aussi une expression du facteur d'intérêt nominal :

$$i_{t+1} = \mu \frac{m_t}{m_{t+1}} \frac{(1-\gamma) m_{t+1} - \gamma e_2}{(1-\gamma) m_t - \gamma e_2} \tag{24}$$

On remplace enfin dans la condition d'arbitrage intertemporel (12) les choix de consommation (18) et (21) ainsi que les facteurs d'inflation et d'intérêt nominal (23) et (24). Ce lissage intertemporel définit l'équilibre.

Définition 1 *Supposons $\gamma \in (0, \overline{\gamma})$. Un équilibre intertemporel est une suite (m_t), avec $\underline{m} \leq m_t < \overline{m}$ et $t = 0, 1, ..., \infty$, qui satisfait l'arbitrage :*

$$\frac{u' (e_1 + e_2 - m_t/\gamma)}{\beta v' (m_{t+1}/\gamma)} = \left[\gamma \mu \frac{m_t}{m_{t+1}} + (1-\gamma) \frac{(1-\gamma) m_t - \gamma e_2}{(1-\gamma) m_{t+1} - \gamma e_2} \right]^{-1} \tag{25}$$

La dynamique du modèle se réduit ainsi à une équation récursive d'ordre un dans la variable m_t. Les encaisses réelles sont non-prédeterminées et dépendent des anticipations que les agents forment sur le futur.

L'adoption de la forme fonctionnelle (2) rend explicite le taux marginal de substitution entre consommation présente et future dans la condition d'arbitrage (25) :

$$\frac{(e_1 + e_2 - m_t/\gamma)^{-\sigma}}{\beta (m_{t+1}/\gamma)^{-\varepsilon}} = \left[\gamma \mu \frac{m_t}{m_{t+1}} + (1-\gamma) \frac{(1-\gamma) m_t - \gamma e_2}{(1-\gamma) m_{t+1} - \gamma e_2} \right]^{-1} \tag{26}$$

6 Etats stationnaires avec et sans bulle

Nous allons maintenant nous focaliser sur l'étude des équilibres stationnaires. Dans son article fondateur, Tirole (1985) montre qu'il existe un état stationnaire avec bulle si l'état stationnaire sans bulle est dynamiquement inefficace, c'est-à-dire caractérisé par un taux d'intérêt inférieur à la règle d'or. Même si, par souci de simplicité, nous considérons une économie d'échange, nous allons montrer que nous obtenons des résultats tout à fait comparables.

D'après les équations (18), (19), (20) et (21), on voit facilement qu'il existe un état stationnaire sans bulle, $b = m(1-\gamma)/\gamma - e_2 = 0$, tel que :

$$
\begin{aligned}
m &= \underline{m} && (27)\\
c &= e_1 - e_2 \frac{\gamma}{1-\gamma} && (28)\\
d &= \frac{e_2}{1-\gamma} && (29)
\end{aligned}
$$

D'après l'équations (26), on voit qu'un état stationnaire avec bulle $b > 0$ est un niveau d'encaisse réelle $m > \underline{m}$ solution de la condition d'arbitrage :

$$
R(m) \equiv \frac{(e_1 + e_2 - m/\gamma)^{-\sigma}}{\beta (m/\gamma)^{-\varepsilon}} = \frac{1}{1+\gamma(\mu-1)} \tag{30}
$$

Comme $R(m)$ est une fonction croissante et telle que $R(\overline{m}^{-}) = +\infty$, il n'existe aucun équilibre stationnaire avec bulle si $R(\underline{m}) \geqslant 1/[1+\gamma(\mu-1)]$. En revanche, il en existe un si $R(\underline{m}) < 1/[1+\gamma(\mu-1)]$.

Proposition 1 *Si $0 < \gamma < \overline{\gamma}$, il existe un état stationnaire sans bulle avec $b = 0$ et $m = \underline{m}$.*

(i) Si $1/[1+\gamma(\mu-1)] \leq R(\underline{m})$, il n'existe aucun équilibre stationnaire avec bulle.

(ii) Si $R(\underline{m}) < 1/[1+\gamma(\mu-1)]$, un équilibre stationnaire avec bulle $b > 0$ et encaisses $m^* \in (\underline{m}, \overline{m})$, coexiste avec celui sans bulle.

Cette proposition montre que, tout comme dans Tirole (1985), un état stationnaire avec bulle coexiste avec celui sans bulle si le taux d'intérêt à l'équilibre sans bulle est suffisamment faible. On remarque que lorsque γ tend vers 0 ou μ vers 1, on retrouve la condition obtenue dans Tirole (1985) : l'état stationnaire avec bulle existe si l'état stationnaire sans bulle est inefficient

$(R(\underline{m}) < 1)$. Dans notre modèle, la monnaie est introduite à travers une contrainte d'encaisse préalable. Cela ajoute une distorsion supplémentaire dans le modèle, mais va nous permettre de discuter du rôle de la politique monétaire, en lien avec l'efficacité de l'équilibre. Finalement, on note qu'à un état stationnaire avec croissance monétaire positive, on a $i = \mu > 1$. Par conséquent, pour tout équilibre dans son voisinage, la contrainte d'encaisses préalables est saturée.

7 Fluctuations autour de l'état stationnaire avec bulle

Nous allons montrer que des fluctuations auto-entretenues de l'activité peuvent apparaître dans le voisinage de l'équilibre stationnaire avec bulle. L'idée est de montrer que des fluctuations expliquées par la volatilité des anticipations des agents émergent, sans que la bulle ne s'effondre. Pour cela, nous allons exploiter l'indétermination de l'équilibre stationnaire avec bulle.

En différenciant l'équation (26) au voisinage de l'état stationnaire avec bulle, on trouve :

$$\frac{dm_{t+1}}{dm_t} = \frac{a + \sigma \frac{m}{\overline{m}-m}}{a - \varepsilon} \tag{31}$$

où

$$a \equiv 1 + \frac{m}{m - \underline{m}} \frac{1-\gamma}{1-\gamma+\gamma\mu} \geq 1 \tag{32}$$

et les bornes $\underline{m}$ et $\overline{m}$ sont données par (20) et (22). Trois cas sont possibles.

1. Si $0 < \varepsilon < a$, alors $dm_{t+1}/dm_t > 1$: l'équilibre stationnaire est instable.
2. Si $a < \varepsilon < 2a + \sigma m / (\overline{m} - m)$, alors $dm_{t+1}/dm_t < -1$: l'équilibre stationnaire est instable.
3. Si $2a + \sigma m / (\overline{m} - m) < \varepsilon$, alors $-1 < dm_{t+1}/dm_t < 0$: l'équilibre stationnaire est localement stable.

On en déduit aisément la proposition suivante qui caractérise la dynamique locale.

Proposition 2 *Si $0 < \gamma < \overline{\gamma}$, l'équilibre est localement indéterminé si et seulement si :*

$$\varepsilon > 2a + \sigma \frac{m}{\overline{m} - m} \equiv \varepsilon^* \tag{33}$$

Génériquement, une bifurcation flip se produit quand $\varepsilon = \varepsilon^*$ et un cycle de période deux se forme.

Cette proposition suggère que des cycles et des fluctuations dues à la volatilité des anticipations des agents peuvent apparaître autour de l'équilibre stationnaire avec bulle, quand les effets revenus sont suffisamment importants. On remarque cependant que dans l'inégalité (33), la valeur critique ε^* dépend aussi de ε. Nous allons donc réexaminer la Proposition 2 en explicitant la valeur de bifurcation et le rôle des effets revenus, et corroborer ainsi l'intuition.

Etant donné ε, un état stationnaire m est solution de l'équation (30). De manière alternative, si l'on fixe m, on peut aussi déterminer la valeur de $\varepsilon > 0$ telle que l'équation (30) soit satisfaite :

$$\varepsilon = \sigma \frac{\ln (e_1 + e_2 - m/\gamma)}{\ln (m/\gamma)} - \frac{\ln ([1 + \gamma (\mu - 1)] / \beta)}{\ln (m/\gamma)} \tag{34}$$

L'existence d'un état stationnaire normalisé $m = 1$ est donc assurée si :

$$\varepsilon = \sigma \frac{\ln (e_1 + e_2 - 1/\gamma)}{\ln (1/\gamma)} - \frac{\ln ([1 + \gamma (\mu - 1)] / \beta)}{\ln (1/\gamma)} \tag{35}$$

On note :

$$\underline{\sigma} \equiv \frac{\ln ([1 + \gamma (\mu - 1)] / \beta)}{\ln (e_1 + e_2 - 1/\gamma)}$$

et on fait les hypothèses suivantes :

Hypothèse 1 *$e_2 < 1/\gamma - 1$, $e_1 + e_2 > 2/\gamma$ et $\sigma > \underline{\sigma}$.*

Sous l'Hypothèse 1, il existe une solution unique $\varepsilon = \varepsilon^* > 0$ à l'équation (35). Par ailleurs, on vérifie facilement que $\underline{m} < 1 < \overline{m}$, ce qui assure que $m = 1$ est un état stationnaire avec bulle.

Proposition 3 *Supposons $0 < \gamma < \overline{\gamma}$ et que l'Hypothèse 1 est satisfaite. L'existence d'un état stationnaire avec bulle $m = 1$ est assurée si $\varepsilon > 0$ est solution de (35).*

Les Propositions 2 et 3 permettent de déterminer des conditions explicites pour que l'équilibre stationnaire avec bulle, $m = 1$, soit localement indéterminé et un cycle de période deux apparaisse.

Proposition 4 *On pose*

$$\sigma_F \equiv \frac{2 + 2\frac{1-\gamma}{1+\gamma(\mu-1)}\frac{\gamma e_2}{1-\gamma(1+e_2)} + \frac{\ln([1+\gamma(\mu-1)]/\beta)}{\ln(1/\gamma)}}{\frac{\gamma(e_1+e_2)-2}{\gamma(e_1+e_2)-1} + \frac{\ln[\gamma(e_1+e_2)-1]}{\ln(1/\gamma)}}$$

Supposons $0 < \gamma < \overline{\gamma}$ et que l'Hypothèse 1 est satisfaite. Alors, l'équilibre stationnaire avec bulle $m = 1$ est localement indéterminé si $\sigma > \sigma_F$.[6] *Génériquement, une bifurcation flip apparaît quand $\sigma = \sigma_F$, générant un cycle de période deux.*

Preuve. Voir l'Annexe. ■

Cette proposition montre l'existence de fluctuations persistantes de l'équilibre avec bulle dues aux anticipations auto-réalisatrices des agents. On peut remarquer que l'émergence de ces fluctuations requiert des effets revenus suffisamment importants, c'est-à-dire des élasticités σ et ε suffisamment élevées.[7] Ces conclusions corroborent celles bien connues obtenues par Grandmont (1985) dans un modèle monétaire à générations imbriquées.

On remarque enfin que l'Hypothèse 1 requiert que la dotation de première période de vie e_1 soit suffisamment élevée et la dotation de seconde période de vie e_2 pas trop forte. La forte dotation des jeunes et les maigres perspectives d'une dotation future incitent les consommateurs à investir l'épargne dans la bulle, même si celle-ci connaît de fortes fluctuations.

L'importance de ce résultat porte sur la possibilité de fluctuations endogène d'une bulle rationnelle. L'indétermination de la bulle permet la construction d'équilibres dont la nature est doublement spéculative : parce que les agents croient dans la bulle et parce qu'ils croient dans les fluctuations de la bulle.

8 Politique monétaire

Une des spécificités de notre modèle est la coexistence possible de la monnaie avec une bulle. Parce qu'il y a une contrainte de liquidité, les consommateurs n'achètent pas seulement la bulle mais aussi l'actif monétaire, et

[6] On note que $\sigma_F > \underline{\sigma}$.

[7] En effet, d'après l'équation (35), une valeur élevée de σ implique également une valeur élevée pour ε.

diversifient ainsi leur épargne. La politique monétaire affecte le taux d'intérêt nominal, la demande de monnaie, la structure du portefeuille, la taille de la bulle et la stabilité de l'équilibre. Un des objectifs de la politique monétaire peut être de stabiliser les fluctuations de l'activité et de la bulle. C'est ce que nous allons envisager maintenant.

En étudiant l'expression de la valeur critique σ_F, on remarque que σ_F croit avec μ si la dotation e_2 est suffisamment faible (en accord avec l'Hypothèse 1). Un niveau plus élevé de μ diminue donc l'ensemble des valeurs de σ compatibles avec l'indétermination de l'équilibre. Cela signifie qu'une croissance monétaire plus importante réduit la possibilité de fluctuations endogènes de la bulle et contribue ainsi à stabiliser le système.

Corollaire 1 *Supposons $0 < \gamma < \overline{\gamma}$ et que l'Hypothèse 1 est satisfaite. Si la dotation e_2 est suffisamment faible, une croissance monétaire μ plus importante contribue à stabiliser l'équilibre en élevant la valeur critique de bifurcation σ_F.*

Cependant, les bienfaits d'une politique monétaire plus expansionniste sont atténuées par ses effets sur le bien-être. Afin de montrer l'arbitrage entre vertus stabilisatrices et méfaits d'une politique monétaire expansionniste, on évalue le bien-être à l'état stationnaire avec bulle.

Proposition 5 *Si $0 < \gamma < \overline{\gamma}$ et $1/\left[1+\gamma\left(\mu-1\right)\right] > R\left(\underline{m}\right)$, alors le bien-être évalué à l'état stationnaire avec bulle décroît avec μ. Il atteint donc son maximum pour $\mu = 1$ (règle de Friedman).*

Preuve. Voir l'Annexe. ■

Une politique monétaire plus expansionniste réduit ainsi le bien-être des consommateurs évalué à l'état stationnaire. La règle optimale de politique monétaire est bien celle de Friedman, c'est-à-dire absence de croissance monétaire et taux d'intérêt nominal nul ($\mu = i = 1$). Dans ce cas, les choix intertemporels des consommateurs ne sont plus affectés par la distorsion qu'implique la contrainte d'encaisse préalable. En effet, on obtient $R\left(m\right) = 1$, ce qui correspond à la règle d'or dans un modèle à générations imbriquées monétaire sans croissance de la population. Ce résultat confirme celui obtenu par Tirole (1985) dans une économie avec accumulation de capital : l'équilibre stationnaire avec bulle correspond à la règle d'or de Phelps. La bulle est donc source d'efficacité.

Les recommandations de politique monétaire que ce modèle simple nous enseigne sont donc contrastées. Les autorités monétaires doivent arbitrer entre améliorer le bien-être et stabiliser les fluctuations.[8]

9 L'éclatement de la bulle

Nous allons maintenant nous focaliser sur d'autres explications possibles des fluctuations d'une économie dans laquelle une bulle peut apparaître. La première est intimement liée à la question de l'éclatement de la bulle. Le modèle de Weil (1987) est une première tentative de concevoir l'éclatement d'une bulle rationnelle. Nous allons réexaminer ses principaux résultats dans notre modèle unifié.

Rappelons que lorsque l'économie est déterministe, l'arbitrage des consommateurs est donné par (12) :

$$u'(c_t) = \frac{i_{t+1}}{\pi_{t+1}} \frac{\beta v'(d_{t+1})}{1+\gamma(i_{t+1}-1)}$$

En suivant l'analyse proposée par Weil (1987), on suppose maintenant qu'il existe une probabilité exogène $1-q \in [0,1)$ d'éclatement de la bulle. La bulle éclate si $i_{t+1} = 0$,[9] et si elle éclate, elle ne se reforme plus. Puisqu'on considère des équilibres où la contrainte d'encaisses préalables est saturée si la bulle persiste, deux cas sont possibles.

- Si $i_t = 0$, alors $i_{t+1} = 0$.
- Si $i_t > 1$, alors $i_{t+1} > 1$ avec probabilité q et $i_{t+1} = 0$ avec probabilité $1-q$.

Dans cette économie stochastique, l'arbitrage intertemporel des consommateurs devient :

$$u'(c_t) = q\frac{i_{t+1}}{\pi_{t+1}} \frac{\beta v'(d_{t+1})}{1+\gamma(i_{t+1}-1)} \tag{36}$$

L'équation (36) mérite quelques explications.

1. On note que d_{t+1}, π_{t+1} et p_{t+1} indiquent, respectivement, la réalisation de la consommation de deuxième période, de l'inflation et du prix dans l'état de nature avec bulle.

[8] Cependant, dans la plupart des travaux, on trouve un coût des fluctuations plutôt faible, comparé aux modifications du bien-être lié à l'état stationnaire (Barlevy (2004)).

[9] Dans ce cas, on a $B_{t+1} = 0$ (voir équation (6)).

2. Evidemment, l'éclatement de la bulle ($i_{t+1} = 0$) correspond au cas où $m_{t+1} = e_2\gamma / (1-\gamma)$ (voir équation (19)).
3. Si la probabilité d'éclatement de la bulle s'annule ($q = 1$), on retrouve l'équation (12) du modèle déterministe.
4. Le modèle de Weil (1987) est obtenu dans le cas où $\gamma = 0$, c'est-à-dire si la contrainte d'encaisses préalables disparaît.

En réutilisant les éléments de la Section 5, on peut alors définir un équilibre intertemporel avec bulle stochastique.

Définition 2 *Supposons $0 < \gamma < \overline{\gamma}$. Un équilibre intertemporel avec bulle stochastique est une suite (m_t), avec $\underline{m} \leq m_t < \overline{m}$ et $t = 0, 1, ..., \infty$, qui satisfait :*

$$\frac{u'\left(e_1 + e_2 - m_t/\gamma\right)}{\beta v'\left(m_{t+1}/\gamma\right)} = q\left[\gamma\mu\frac{m_t}{m_{t+1}} + (1-\gamma)\frac{(1-\gamma)\,m_t - \gamma e_2}{(1-\gamma)\,m_{t+1} - \gamma e_2}\right]^{-1} \tag{37}$$

où la variable m_{t+1} indique la réalisation de l'encaisse réelle dans l'état de nature avec bulle.[10]

Les arguments mobilisés dans la Section 6 s'appliquent aussi aisément à l'étude de équilibre stationnaire avec bulle stochastique. Un tel état stationnaire est solution de l'équation suivante :

$$R\left(m\right) \equiv \frac{\left(e_1 + e_2 - m/\gamma\right)^{-\sigma}}{\beta\left(m/\gamma\right)^{-\varepsilon}} = \frac{q}{1 + \gamma\left(\mu - 1\right)} \tag{38}$$

Comme $R\left(m\right)$ est croissant et $R(\overline{m}^{-}) = +\infty$, il n'existe aucun équilibre stationnaire avec bulle stochastique si $R\left(\underline{m}\right) \geqslant q/\left[1 + \gamma\left(\mu - 1\right)\right]$. En revanche, il en existe un si $R\left(\underline{m}\right) < q/\left[1 + \gamma\left(\mu - 1\right)\right]$. Dans ce cas, puisque $R(m)$ est croissant, m augmente avec q. La bulle étant déterminée par $b = m(1-\gamma)/\gamma - e_2$, elle est également croissante avec q.

Proposition 6 *Supposons $0 < \gamma < \overline{\gamma}$. Si $q \leq R\left(\underline{m}\right)\left[1 + \gamma\left(\mu - 1\right)\right]$, il n'existe aucun équilibre stationnaire avec bulle stochastique. Par contre, si $q > R\left(\underline{m}\right)\left[1 + \gamma\left(\mu - 1\right)\right]$, il existe un équilibre stationnaire avec bulle stochastique $b > 0$ et $\hat{m} \in (\underline{m}, \overline{m})$. Dans ce cas, la bulle est croissante avec la probabilité q. Enfin, $b = 0$ si $q = R\left(\underline{m}\right)\left[1 + \gamma\left(\mu - 1\right)\right]$.*

[10] L'équation (37) est obtenue en remplaçant les expressions (18), (21), (23) et (24) (pour d_{t+1}, c_t, π_{t+1} et i_{t+1} respectivement) dans l'équation d'arbitrage intertemporel (36).

Un corollaire de cette proposition est que $R(\underline{m}) > 1/[1+\gamma(\mu-1)]$ exclut toute possibilité d'état stationnaire avec bulle. Un autre corollaire est qu'une politique monétaire plus expansionniste, qui se traduirait par une hausse de μ, pourrait neutraliser toute bulle. En effet, pour une probabilité q donnée, une telle politique pourrait rendre l'inégalité $q \leq R(\underline{m})[1+\gamma(\mu-1)]$ satisfaite. Cela signifie qu'une politique monétaire suffisamment expansionniste élimine toute possibilité de bulle spéculative.

10 Bulle temporaire sur les encaisses réelles

Dans cette section, nous allons nous focaliser sur une autre façon de concevoir les fluctuations de l'activité en présence d'une bulle rationnelle. En nous inspirant de l'analyse proposée dans Michel et Wigniolle (2003, 2005), nous allons exploiter l'idée que l'économie peut alterner entre des périodes où la contrainte d'encaisse préalable est saturé e et des périodes où elle ne l'est pas. Dans un tel cas, il y a aussi une bulle sur l'encaisse réelle à certaines périodes.

On commence par définir des équilibres tels que $i_{t+1} = 1$. Comme expliqué dans l'annexe, la contrainte (10) n'est plus saturée.[11] Dans ce cas, une bulle sur l'encaisse réelle se forme et l'arbitrage intertemporel du consommateur devient :

$$\frac{u'(c_t)}{\beta v'(d_{t+1})} = \frac{1}{\pi_{t+1}} \tag{39}$$

où les consommations c_t et d_{t+1} sont données par (15) et (17), et les équations (13) et (16) s'écrivent :

$$m_{t+1}\pi_{t+1} = \mu m_t \tag{40}$$

$$b_{t+1}\pi_{t+1} = b_t \tag{41}$$

L'analyse proposée par Michel et Wigniolle (2003, 2005) va nous aider à montrer qu'il est possible d'avoir des équilibres à changement périodique de régime : l'économie peut osciller entre des périodes où la consommation de seconde période est contrainte par les encaisses réelles, et des périodes où elle ne l'est plus et les encaisses forment donc une bulle. Par simplicité, on privera les ménages de dotation en deuxième période de vie.

[11] Le multiplicateur associé à la contrainte d'encaisses préalables s'annule : $\lambda_{3t} = 0$ (voir l'Annexe).

Hypothèse 2 $e_2 = 0.$

Pour exhiber des changements de régime, qui impliquent des fluctuations de l'activité et de la bulle, on va montrer que les équilibres où la contrainte (10) est saturée et ceux où elle ne l'est pas, peuvent se définir à partir d'un même système dynamique. En effet, dans les deux cas, les consommations sont déterminées par (15) et (17), avec $e_2 = 0$, et l'arbitrage entre consommation présente et future par (12), avec $i_{t+1} = 1$ lorsqu'une bulle sur les encaisses réelles se forme, et $i_{t+1} > 1$ sinon. Par ailleurs, d'après les équations (13) et (16), on peut déterminer le taux d'intérêt :

$$i_{t+1} = \mu \frac{x_{t+1}}{x_t} \tag{42}$$

où la variable financière $x_t \equiv b_t/m_t \geqslant 0$ représente la structure de portefeuille. On en déduit que :

1. lorsque $i_{t+1} > 1$ et la consommation de deuxième période est contrainte par les encaisses réelles ($d_{t+1} = m_{t+1}/\gamma$), on trouve :

$$\frac{x_t}{\mu} < x_{t+1} = \frac{1-\gamma}{\gamma} \tag{43}$$

2. lorsque $i_{t+1} = 1$ et la consommation de deuxième période n'est pas contrainte par l'encaisse réelle ($d_{t+1} < m_{t+1}/\gamma$), on a :

$$\frac{x_t}{\mu} = x_{t+1} < \frac{1-\gamma}{\gamma} \tag{44}$$

En réécrivant les consommations du cycle de vie :

$$c_t = e_1 - m_t (1 + x_t) \tag{45}$$

$$d_{t+1} = m_{t+1} (1 + x_{t+1}) \tag{46}$$

et en utilisant (23) et (42), l'arbitrage intertemporel (12) devient :

$$\frac{u' (e_1 - m_t (1 + x_t))}{\beta v' (m_{t+1} (1 + x_{t+1}))} = \frac{m_{t+1}}{m_t} \left[\gamma\mu + (1-\gamma) \frac{x_t}{x_{t+1}} \right]^{-1} \tag{47}$$

L'équation (47) détermine la dynamique (m_t) quelque soit la suite (x_t), c'est-à-dire le type de régime (consommation de deuxième période contrainte ou non par l'encaisse réelle) dans lequel l'économie se trouve. Le suite (x_t) satisfait les conditions (43) et (44), représentées dans la Figure 1, qui sont indépendantes de (m_t).

Puisque x_t est une variable non-prédéterminée, les agents peuvent parfaitement se coordonner sur $x_t = (1-\gamma)/\gamma$ pendant n périodes. On observe que lorsque $\mu > 1$, l'inégalité de la condition (43) est satisfaite.

Les consommateurs se coordonnant ensuite sur la solution qui satisfait (44), un changement de régime s'opère. Lorsque $\mu > 1$, on peut rester dans ce régime durant p périodes. En effet, en itérant l'équation de récurrence $x_{t+1} = x_t/\mu$ avec $x_n = (1-\gamma)/\gamma$ comme point de départ, on obtient

$$x_{n+i} = \frac{1}{\mu^i}\frac{1-\gamma}{\gamma} < \frac{1-\gamma}{\gamma}$$

pour $i = 1, ..., p$.

Une telle solution satisfait donc (44). Après ces $n+p$ périodes, les consommateurs peuvent de nouveau coordonner leurs anticipations sur l'équilibre sans bulle sur les encaisses réelles où $x_{t+1} = (1-\gamma)/\gamma$ (voir aussi la Figure 1).

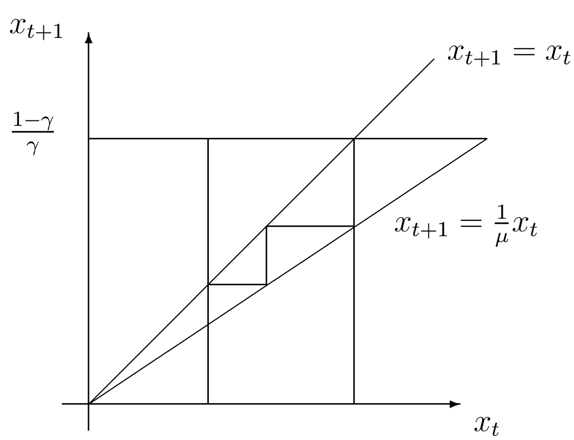

FIG. 1 – Dynamique de (x_t), avec $\mu > 1$

Proposition 7 *Sous les hypothèses de création monétaire ($\mu > 1$), de contrainte partielle d'encaisses préalables ($0 < \gamma < \overline{\gamma}$), de nullité de la dotation de deuxième période (Hypothèse 2), il existe un $(n+p)$-cycle avec anticipations auto-réalisatrices : l'économie passe d'un régime composé de n périodes où la consommation de deuxième période est contrainte par les encaisses réelles ($m_{t+1} = \gamma d_{t+1}$), à un régime composé de p périodes où se forme aussi une bulle sur les encaisses réelles ($m_{t+1} > \gamma d_{t+1}$).*

Dans la Section 7, on a montré la possibilité de fluctuations endogènes d'une bulle rationnelle sur l'actif non purement monétaire. La Proposition 7 démontre la possibilité d'une bulle qui porte aussi sur l'autre actif, les encaisses réelles. La bulle monétaire peut exhiber une dynamique cyclique qui entraîne des fluctuations de l'activité. La démonstration s'appuie sur un argument d'indétermination globale de l'équilibre intertemporel. Cette multiplicité d'équilibres possibles permet l'existence de fluctuations dues à la volatilité des anticipations des agents. Il faut enfin observer qu'après avoir éclaté, la bulle monétaire peut éventuellement se reformer : son éviction n'est pas forcément définitive.

11 Remarques finales

Est-ce que la volatilité des marchés et leur caractère spéculatif, ce que Greenspan a appelé l'exubérance irrationnelle, peut-être compatible avec la rationalité des agents ? Cet article s'intéresse à cette question en se référant à un certain nombres de résultats et en considérant une approche macro-dynamique.

Dans ce but, nous développons un modèle à générations imbriquées dans lequel les agents font un choix de porte-feuille entre deux actifs, l'un est une bulle pure, c'est-à-dire sans valeur fondamentale, l'autre, la monnaie, est détenue à cause d'une contrainte d'encaisse préalable.

Les anticipations ont un rôle primordial dans les résultats que nous exposons. D'abord, parce qu'un équilibre stationnaire avec bulle existe uniquement si les agents pensent qu'il va perdurer (avec une probabilité non nulle). Ensuite, parce que nous nous intéressons à des fluctuations de l'activité, en présence d'une bulle rationnelle, provenant de la volatilité des anticipations des agents. A ce sujet, nous mettons en avant plusieurs résultats.

Premièrement, des fluctuations dues à la volatilité des anticipations des agents peuvent apparaître dans le voisinage d'un équilibre avec bulle. On observe alors des fluctuations d'une bulle spéculative. Nous montrons qu'une politique monétaire expansionniste peut stabiliser de telles fluctuations, mais au prix d'une réduction du bien-être à l'état stationnaire.

Ensuite, nous mettons en exergue que les anticipations auto-réalisatrices des agents peuvent expliquer une explosion de la bulle. Là encore la politique monétaire peut jouer un rôle. En effet, une politique monétaire suffisamment expansionniste peut éradiquer l'existence de la bulle.

Enfin, nous montrons qu'une bulle peut aussi temporairement se former sur l'encaisse réelle. Des fluctuations dues aux anticipations auto-réalisatrices des agents peuvent apparaître, l'économie oscillant entre des périodes où il y a une bulle sur les encaisses réelles et d'autres où la monnaie est détenue pour des motifs de transactions.

Le modèle que nous développons est volontairement simple, mais permet de montrer tous ces résultats dans un cadre unifié. L'existence d'une contrainte d'encaisse préalable nous permet de mettre en avant le rôle de la politique monétaire. Elle traduit aussi implicitement l'existence d'une imperfection du marché du crédit. En effet, en son absence, l'épargne serait rémunérée à un taux d'intérêt supérieur.

L'étude du lien entre bulles rationnelles et imperfections du marché du crédit connaît d'ailleurs un certain nombre de développements très récents. Bosi et Seegmuller (2010) introduisent une vitesse de circulation de la monnaie variable, provenant de la détention de collatéraux. L'épargne pouvant également se faire sous forme de capital physique, des fluctuations dues à la volatilité des anticipations des agents peuvent apparaître dans le voisinage d'un état stationnaire avec bulle pour des imperfections de marché arbitrairement faibles.[12] En présence d'entreprises contraintes financièrement, Fahri et Tirole (2010) montrent, entre autres, qu'une bulle peut apparaître lorsqu'il y a efficience dynamique. Un tel résultat a d'ailleurs aussi été montré par Woodford (1990), mais dans un modèle très différent. Enfin, Martin et Ventura (2010) analysent le rôle des bulles sur la croissance lorsque les projets d'investissement ont des rendements différents. Ceux au rendement le plus élevé sont alors favorisés.

[12] On peut également mentionner Azariadis et Reichlin (1996) qui introduisent des externalités productives dans le modèle de Tirole (1985). Ils montrent la possibilité de fluctuations de la bulle sous l'hypothèse de rendements d'échelle fortement croissants.

12 Annexe

12.1 Comportement optimal du consommateur

Le consommateur maximise un lagrangien

$$\begin{aligned}&u(c_t)+\beta v(d_{t+1})+\lambda_{1t}\left(e_1+\tau_t-c_t-m_{t+1}\pi_{t+1}-b_t\right)\\&+\lambda_{2t}\left(m_{t+1}+b_t i_{t+1}/\pi_{t+1}+e_2-d_{t+1}\right)+\lambda_{3t}\left(m_{t+1}-\gamma d_{t+1}\right)\end{aligned}$$

où $\lambda_{1t}, \lambda_{2t} \geqslant 0$ sont les multiplicateurs associés aux contraintes budgétaires et $\lambda_{3t} \geqslant 0$ celui associé à la contrainte d'encaisses préalables.

On dérive les conditions du premier ordre :

$$\lambda_{1t} = u'(c_t) > 0 \tag{48}$$

$$\beta v'(d_{t+1}) = \lambda_{2t} + \gamma\lambda_{3t} \tag{49}$$

$$\lambda_{2t} + \lambda_{3t} = \lambda_{1t}\pi_{t+1} \tag{50}$$

$$\lambda_{1t}\pi_{t+1} = \lambda_{2t} i_{t+1} \tag{51}$$

Les conditions du second ordre sont satisfaites sous l'hypothèse de concavité des fonctions d'utilité (voir expression (2)).

L'équation (51) s'écrit $\lambda_{2t} = \lambda_{1t}\pi_{t+1}/i_{t+1} > 0$ et implique avec l'équation (50) $\lambda_{3t} = \lambda_{1t}\pi_{t+1}\left(1 - 1/i_{t+1}\right)$. La contrainte d'encaisses préalables est saturée si $\lambda_{3t} > 0$, c'est-à-dire si le taux d'intérêt nominal est positif : $i_{t+1} > 1$. Dans ce cas, on remplace (48) dans λ_{2t} et λ_{3t}, et ces derniers dans (49) pour avoir (12). ■

12.2 Preuve de la Proposition 4

On observe préalablement que l'Hypothèse 1 implique $\sigma_F > 0$. Si l'on remplace (32) et (35) dans l'inégalité (33) et on pose $m = 1$, on trouve la condition explicite d'indétermination : $\sigma > \sigma_F$. La Proposition 2 implique immédiatement la Proposition 4. ■

12.3 Preuve de la Proposition 5

En utilisant l'équation (30), on voit immédiatement que $dm/d\mu < 0$ à l'équilibre avec bulle. Par ailleurs, en remplaçant les consommations $c =$

$e_1 + e_2 - m/\gamma$ et $d = m/\gamma$ dans l'utilité $c^{1-\sigma}/(1-\sigma) + \beta d^{1-\varepsilon}/(1-\varepsilon)$, on obtient l'utilité indirecte :

$$W(m) \equiv \frac{(e_1 + e_2 - m/\gamma)^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \beta \frac{(m/\gamma)^{1-\varepsilon}}{1-\varepsilon}$$

Il s'agit d'une fonction croissante. En effet, on peut signer sa dérivée grâce à l'équation (30) définissant l'état stationnaire :

$$W'(m) = \frac{\beta}{\gamma} \left(\frac{m}{\gamma}\right)^{-\varepsilon} \frac{\gamma(\mu - 1)}{1 + \gamma(\mu - 1)} > 0$$

Ainsi $dW/d\mu = W'(m) dm/d\mu < 0$, ce qui conclut la preuve. ■

Références

[1] Azariadis, C. et P. Reichlin (1996), "Increasing returns and crowding out", *Journal of Economic Dynamics and Control* **20**, 847-877.

[2] Banerjee, A.V. (1992), "A simple model of herd behavior" *Quarterly Journal of Economics* **107**, 797-817.

[3] Barlevy, G. (2004), "The cost of business cycles and the benefits of stabilization : a survey" , NBER Working Paper 10926, Cambridge.

[4] Benhabib, J. et R.E.A. Farmer (1999), "Indeterminacy and sunspots in macroeconomics". In : J. Taylor and M. Woodford (Eds.) *Handbook of Macroeconomics* (Amsterdam : North-Holland). Vol. 1, p. 387-448.

[5] Bikhchandani, S., D. Hirshleifer et I. Welch (1993) "A theory of fads, fashion, custom and cultural change as informational cascades" *Journal of Political Economy* **100**, 992-1026.

[6] Bosi, S. et T. Seegmuller (2010), "On rational exuberance", *Mathematical Social Sciences* **59**, 249-270.

[7] Bourne, H.R.F. (1871) *The Romance of Trade*, London, New York : Cassell, Petter, Galpin.

[8] Campbell, J.Y. (1999), "Asset prices, consumption and the business cycle". In : J. Taylor and M. Woodford (Eds.) *Handbook of Macroeconomics* (Amsterdam : North-Holland). Vol. 1, p. 1231-1303.

[9] Campbell, J.Y. (2000), "Asset pricing at the millennium", *Journal of Finance* **55**, 1515-1567.

[10] Cont, R. et J.P. Bouchaud (2000), "Herd behavior and aggregate fluctuations in financial markets", *Macroeconomic Dynamics* **4**, 170-196.

[11] Crettez, B., P. Michel et B. Wigniolle (1999), "Cash-in-advance constraints in the Diamond overlapping generations model : neutrality and optimality of monetary policy", *Oxford Economic Papers* **51**, 431-452.

[12] Diba, B.T. et H.I. Grossman (1987), "On the inception of rational bubbles", *Quarterly Journal of Economics* **102**, 697-700.

[13] Diba, B.T. et H.I. Grossman (1988), "Rational inflationary bubbles", *Journal of Monetary Economics* **21**, 35-46.

[14] Fahri, E. et J. Tirole (2010), "Bubbly liquidity", miméo.

[15] Friedman, M. (1969), "The optimum quantity of money", in *The Optimum Quantity of Money and Other Essays* 1-50, Aldine, Chicago.

[16] Froot, K. A. et M. Obstfeld (1991), "Intrinsic bubbles : the case of stock prices", *American Economic Review* **81**, 1189-1214.

[17] Hahn, F. et R. Solow (1995), *A Critical Essay on Modern Macroeconomic Theory*, Basil Blackwell, Oxford.

[18] Hommes, C.H. (2006), "Heterogeneous agent models in economics and finance". In : L. Tesfatsion and K.L. Judd (Eds.) *Handbook of Computational Economics* (Amsterdam : North-Holland).Vol. 2, p. 1109-1186.

[19] LeRoy, S. et R. Porter (1981), "The present value relation : tests based on variance bounds", *Econometrica* **49**, 555-584.

[20] Martin, A. et J. Ventura (2010), "Economic growth with bubbles", miméo.

[21] Michel, P. et B. Wigniolle (2003), "Temporary bubbles", *Journal of Economic Theory* **112**, 173-183.

[22] Michel, P. et B. Wigniolle (2005), "Cash-in-advance constraints, bubbles, and monetary policy", *Macroeconomic Dynamics* **9**, 28-56.

[23] Poterba, L. et L. Summers (1988), "Mean reversion in stock prices : evidence and implications", *Journal of Financial Economics* **22**, 26-59.

[24] Shiller, R.J. (1981), "Do stock prices move too much to be justified by subsequent changes in dividends ?", *American Economic Review* **71**, 421-36.

[25] Shiller, R.J. (1989), *Market Volatility*, MIT Press, Cambridge, MA.

[26] Shiller, R.J. (1999), "Human behavior and the efficiency of the financial system". In : J. Taylor and M. Woodford (Eds.) *Handbook of Macroeconomics* (Amsterdam : North-Holland). Vol. 1, p. 1305-1340.

[27] Shiller, R.J. (2000), *Irrational Exuberance*, Princeton University Press.

[28] Tirole, J. (1982), "On the possibility of speculation under rational expectations", *Econometrica* **50**, 1163-1181.

[29] Tirole, J. (1985), "Asset bubbles and overlapping generations", *Econometrica* **53**, 1071-1100.

[30] Weil, P. (1987), "Confidence and the real value of money in overlapping generations models", *Quarterly Journal of Economics* **102**, l-22.

[31] Woodford, M. (1990), "Public debt as private liquidity", *American Economic Review* **80**, 382-388.